

LEONHARD EULER (1707-1783)

SANTIAGO FERNÁNDEZ (*)

“Euler puede calcular sin ningún esfuerzo aparente, exactamente igual que los hombres respiran y que las águilas se mantienen en el aire”

François Arago

“Multiplicó sus producciones más allá de lo que hubieran osado alcanzar las fuerzas humanas y, sin embargo, fue original en cada una de ellas”

Condorcet

“Leed a Euler, es el maestro de todos nosotros”

Pierre Simón de Laplace

Hace trescientos años nació en Basilea el matemático más prolífico de toda la historia. A lo largo de su dilatada vida científica descubrió unos miles de resultados. Sus libros y artículos representan aproximadamente una tercera parte de la investigación en matemáticas, física teórica e ingeniería mecánica en el periodo comprendido de 1726 a 1800. Sin él las matemáticas serían otras. Euler es aún un genio por descubrir. Este es un pequeño homenaje a su amor por las matemáticas y a su enorme creatividad.



Leonhard Euler

Leonhard Euler nació en Basilea el 15 de abril de 1707, su padre Paulus Euler, pastor calvinista, era un matemático aficionado que había sido discípulo, en su juventud, de Jacques I Bernoulli; mientras que su madre, Marguerite Frucker, tuvo poco influencia en sus estudios.

(*) Asesor de Matemáticas del Berritzegune de Abando.

Paulus quería que Leonhard, siguiera sus pasos, pero no tuvo más remedio que rendirse ante el genio matemático de su hijo, así que no dudó en colaborar en su instrucción matemática, matriculándole en la Universidad de Basilea. L.Euler estudió Teología, Medicina, Astronomía, Física y Lenguas orientales; por tanto podemos señalar que tuvo una educación esmerada y muy completa. Normalmente escribía en latín y también en francés, a pesar de que su lengua materna era el alemán. Esta extraordinaria facilidad para aprender idiomas constituyó, sin duda, una gran ventaja para él, debido al hecho de que una de las características de la matemática del siglo XVIII fue la gran facilidad con que se podían desplazar los grandes matemáticos de un país a otro.

El gran amor por las matemáticas, posiblemente le vino por dos vertientes, una ya señalada y la otra proveniente de Johann Bernoulli, quién era considerado, en ese momento, uno de los matemáticos más importantes del mundo. Johann Bernoulli rápidamente se dio cuenta de la extraordinaria capacidad de Leonhard para las matemáticas y se dedicó a darle, gratuitamente, una hora semanal; a dichas clases también asistían dos de los hijos de Johann: Nicolás y Daniel. La amistad con los Bernoulli duró toda su vida y tuvo, sin duda, una gran influencia, al menos en los primeros momentos de su vida científica.

El año 1726 Euler publicó su primer trabajo; un año más tarde la Academia de París le otorgó una mención honorífica por un trabajo que versaba sobre la disposición óptima del mástil en los barcos de vela. En estos escritos ya se vislumbra la manera original y creativa, que tenía Euler, para resolver cuestiones y problemas científicos.

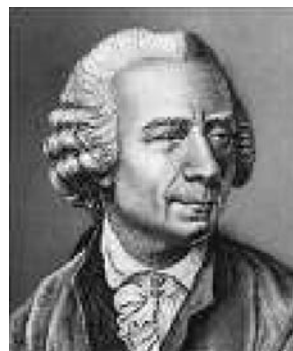
1727-1740. PRIMERA ESTANCIA EN LA ACADEMIA DE CIENCIAS DE SAN PETERSBURGO

Su ingenio para resolver problemas matemáticos se difundió rápidamente entre los centros y academias científicas. El año 1727 recibió una invitación para trabajar en la *Academia de Ciencias de San Petersburgo*, donde ya se encontraban como profesores de matemáticas, los hermanos Nicolás y Daniel Bernoulli. Esta importante institución había sido fundada en el año 1725 por Catalina. Era una Academia aún joven pero de mucha proyección científica por la categoría de sus miembros.

La oferta que recibió Euler era para ocupar una plaza en la sección de Fisiología y Medicina. Pero, el mismo día en que llegó a Rusia moría la emperatriz Catalina, y la Academia estuvo a punto de desaparecer con ella, debido a que los nuevos gobernantes mostraron menos simpatía por los sabios extranjeros que la manifestada por los zares Pedro y Catalina. Estos años debieron ser difíciles para Euler, pero su gran pasión por resolver problemas compensaba todos los sinsabores mundanos.

En 1730, Euler ocupó la cátedra de Filosofía Natural y en 1733 sucedió a su amigo Daniel, que abandonó Rusia para hacerse cargo de la cátedra de Matemáticas en la Universidad de Basilea. Ese mismo año Leonhard se casó con Catherine Gsell, hija del pintor sueco G. Gsell, y que en ese momento dirigía la Academia de Pintura de San Petersburgo. Este matrimonio tuvo 13 hijos, cinco de los cuales murieron siendo aún niños.

Sus resultados durante esta primera estancia en la Academia de Ciencias fueron espectaculares; mostremos aquí algunos de ellos:



Leonhard Euler

- Con el fin de resolver problemas de series, definió en 1729 la función *gamma* y demostró algunas de sus propiedades.
- Un año más tarde, en 1730, introdujo la función *beta*, probando la relación entre las funciones *gamma* y *beta*.
- En 1735 la Academia de París, propuso un problema relacionado con la astronomía, Euler se concentró de tal manera en solucionarlo que debido al enorme esfuerzo ocular, pues requería de muchas observaciones, perdió la visión de su ojo derecho.
- El año 1736 publicó la primera de las varias pruebas que dio del *Pequeño Teorema de Fermat*.
- En 1737 demostró la infinitud de los números primos por un procedimiento muy original y que a la postre dio origen a la *Teoría Analítica de Números*.
- Ese mismo año también dio una prueba de la irracionalidad del número *e*, utilizando fracciones continuas, y dos años más tarde, en 1739, demostró la irracionalidad del cuadrado del número *e*.
- El número *e* siempre ejerció en Euler una especial fascinación. Lo calculó por varios procedimientos, hallando del mismo hasta 23 cifras significativas. Su valor es $e = 2,718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 28\dots$
- El número π fue investigado y obtenido, por Euler en muchos periodos de su vida, empleando diversos métodos para aproximarle, entre otros el obtenido aplicando el teorema de la adición a la función arctag.
- Resolvió también problemas populares como el famoso de los *Siete puentes de Königsberg*.
- A lo largo de estos años se preocupa por solucionar diversos problemas relacionados con la teoría clásica de números, muchos de ellos planteados por P. Fermat y otros provenientes de su relación con su amigo Goldbach.
- Entre los años 1732 y 1736 estudia productos infinitos y problemas de isoperímetros.
- Poco antes de abandonar San Petersburgo, en 1739, le escribe una nota a Johann Bernoulli en la que le comunica como las ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes se pueden resolver mediante la resolución de su ecuación característica asociada.

En resumen, durante su estancia en San Petersburgo realizó una inmensa producción científica. En los catorce años que permaneció allí, escribió más de 100 artículos del más alto nivel y su famoso tratado *Mechanica* (1736), además de un libro de *Cálculo* (impreso 1738-40). Como curiosidad conviene recordar que La Academia de San Petersburgo publicaba una revista científica, *Commentarii Academiae Scientiarum Imperiales Petropolitanae*, y hemos de constatar que la mayoría de su contenido provenía de trabajos escritos por Euler; así pues, los editores no tenían preocupación ante una eventual escasez de material que publicar, ya que la pluma de Euler estaba siempre presta para escribir.

1741-1766. ESTANCIA EN LA ACADEMIA DE CIENCIAS DE BERLÍN

El año 1740 murió la zarina Anna y con su desaparición se presentó en la Academia de Ciencias de San Petersburgo una situación de incertidumbre y gran desasosiego. Por esta razón Euler decidió aceptar una invitación, que años antes le había realizado el rey Federico II el Grande de Prusia, para incorporarse a la Academia de Ciencias de Berlín. Es conveniente saber que en la Europa del siglo XVIII se implantaron varias Academias y Sociedades Científicas, una de las más famosas fue *La Academia de Berlín*, creada en 1700, cuyo primer director fue el célebre filósofo y matemático G. Leibnitz.

A raíz la entronización de Federico II, en 1740, el monarca se esforzó por impulsar y renovar la Academia, que hasta entonces había tenido una actividad muy reducida. Nombrando, en 1741 al científico francés Maupertuis como presidente y contratando a personas de gran prestigio, como es el caso de Euler.

Cuando Euler llegó a Berlín, el año 1741, encontró al reino prusiano sumido en la primera guerra *silesia* y con una actividad científica prácticamente inexistente. Como consecuencia no le fue posible ocupar su cátedra en la Academia, debido a que en ese momento estaba pasando por la peor crisis económica desde su fundación. Para ganarse la vida Euler se ocupó en dar clases a miembros de familias nobles, entre las que destaca las impartidas a la princesa Filippina von Schwendt, pariente del rey de Prusia; durante años la dio lecciones y al ser interrumpidas, Euler las completó por escrito, naciendo de esta forma sus famosas *Lettres a une princese d'Allemagne* (Cartas a una princesa alemana), obra que es considerada como la primera enciclopedia de física que se haya elaborado. Está compuesta por tres tomos publicados en Rusia, el primero en 1768 y el último en 1772.

Cuando las cuestiones palaciegas se calmaron el monarca creó una renovada institución académica con el objetivo de competir con otras Academias ya existentes en Londres, París y San Petersburgo. Así nació, en 1744, la nueva *Academia de Ciencias y Letras de Berlín* y a ella fue invitado Euler como responsable de las actividades matemáticas y Maupertuis como presidente. Debido a las continuas ausencias de Maupertuis era Euler el que dirigía la Academia. De hecho, el monarca le encomendó trabajos de una cierta importancia como: la nivelación del canal Finow, instalaciones de juegos de agua, la dirección de una mina de sal, diversas cuestiones financieras, como la creación de montepíos de viudedad y juegos de lotería, etc. Para realizar estas acciones Euler disponía de una partida económica importante, pero curiosamente para investigar cuestiones matemáticas no recibiría ninguna ayuda económica sustancial. La razón estribaba en el hecho de que el monarca Federico se sentía más a gusto con los filósofos, como el caso de Voltaire, que con los geómetras. Para el monarca, Euler era un *filósofo anodino*, incapaz de dar gracejo y prestancia a los salones cortesanos. Algunos contemporáneos narran que cuando el monarca se refería a Euler, le llamaba, de manera despectiva "el cíclope matemático" (en ese momento Euler veía únicamente a través de un sólo ojo). Así las relaciones con el monarca debieron ser muy difíciles y en algunos momentos insoportables.

Euler pasó en Berlín 25 años pero sin perder contacto con la Academia de San Petersburgo a la que envió numerosos artículos.

Actualmente se tiene mucha documentación de la vida de Euler. Algunos historiadores hacen referencia a su prodigiosa memoria, a su afición por la filosofía, a su carácter tranquilo y hogareño, a su relación con otros matemáticos, etc. Rescatemos un pequeño texto en el que podemos vislumbrar el respeto con el era considerado por sus contemporáneos:

"Su madre, ya viuda, vivió también en Berlín durante varios años, recibiendo asiduas atenciones de su hijo y disfrutando del placer de verle universalmente estimado y admirado. Un hecho que habla mucho en favor de la estima en que se tenía a Euler, es que cuando el ejército ruso invadió Alemania en 1760 y saqueó una granja de su propiedad y el acto llegó a conocimiento del general, la pérdida fue inmediatamente remediada, y a ello se añadió un obsequio de cuatro mil florines, hecho por la emperatriz Isabel cuando se enteró del suceso".



Sellos conmemorativos con la figura de Leonhard Euler

Mostremos ahora alguno de sus logros:

- En 1744 realiza un trabajo en relación con el Cálculo de Variaciones titulado *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*.
- Tres años más tarde, 1747, publica una memoria titulada *Recherches sur le mouvement des corps celestes en general*, deduciendo a partir de la segunda ley de la dinámica y de la ley de gravitación universal la primera ley de Kepler. El año siguiente prosigue con sus investigaciones astronómicas, estudiando las interacciones y perturbaciones entre los planetas de Saturno y Jupiter, por este trabajo le fue concedido el primer premio de la Academia de París. Los trabajos en astronomía ocuparon buena parte de su tiempo. Este era un campo de interés, ya desde su estancia en San Petersburgo, a raíz de la amistad con el astrónomo D.J. Nicholas(1688-1768), que como sabemos encontraron, después de observaciones tomadas todos los días durante diez años, el instante exacto del medio día.
- La teoría de números, como ya hemos visto, fue una de sus grandes pasiones y la cultivó en toda su trayectoria científica. El año 1842, en una carta remitida a su amigo Goldbach le informa de sus investigaciones acerca de algunos resultados obtenidos sobre los factores primos de los números de la forma $Ax^2 + By^2$ en la que A, B, x, y son números enteros. Como sabemos la solución de estos problemas conducen a casos particulares de la denominada *Ley de reciprocidad cuadrática*. Años más tarde trabajó en el estudio de los números poligonales, los números amigos, los números perfectos, etc.
- El año 1747 encuentra la relación $i\alpha = \ln(\cos\alpha + isen\alpha)$ que le permite concluir que un número, distinto de cero, tiene infinitos logaritmos. Este aspecto le lleva al estudio de exponentes imaginarios, y en particular a encontrar la maravillosa igualdad.

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

Como podemos observar en la expresión figuran los cinco números más importantes de las matemáticas.

- Durante su estancia en Berlín se dedica, al igual que en San Petersburgo, a resolver problemas relativos a la geometría elemental. Entre los variados resultados obtenidos destacamos la obtención de una demostración sintética de la fórmula de



Leonhard Euler

Herón para calcular el área de un triángulo en función de sus lados; la demostración de que en cualquier triángulo, el ortocentro, el baricentro y el circuncentro están siempre alineados, llamándose a esa recta *la recta de Euler* (1767), la obtención del *círculo de Euler*, propiedades de paralelogramos... y otros problemas que tienen que ver con la combinatoria y la geometría. Hemos dejado para el final su gran hallazgo, obtenido en 1750 y dice así: "que si un poliedro es tal que su superficie puede ser deformada con continuidad hasta transformarse en la superficie de una esfera, entonces se verifica que":

$$C + V = A + 2$$

Siendo C = Número de caras del poliedro, V= Número de vértices del poliedro, A= Número de aristas del poliedro.

- Pero sin duda, su gran aportación a la difusión de las matemáticas es la publicación de su gran tratado sobre cálculo: *Introductio in Analysin Infinitorum* (1748). Son muchos los aspectos desarrollados en su *Introductio*, mencionaremos únicamente tres, el primero tiene que ver con la idea de función que la define como "cualquier expresión analítica formada con la cantidad variable y con números o cantidades constantes", el segundo elemento relevante es la famosa igualdad:

$$(\cos z \pm isenz)^p = \cos pz \pm isenpz$$

Y el tercero nos muestra la maestría de Euler como gran calculista, sirva el ejemplo siguiente: si definimos la constante

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) = \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x} \right) dx$$

Euler calcula para ella el siguiente valor:

$$\gamma: 0,577\ 215\ 664\ 901\ 532\ 860\ 607 \dots$$

Esta constante se la conoce actualmente como la constante de Euler-Mascheroni, y aún no ha podido demostrarse si es un número racional o irracional, trascendente o algebraico.

Además de esa gran obra escribe sobre muchísimos temas más, una muestra:

- En 1749 publica los *Nuevos principios de la artillería*.
- En 1752 ve la luz un importantísimo trabajo sobre la mecánica de fluidos titulado *Principia motus fluidorum*.
- En 1761 un trabajo sobre lentes cromáticas.

Al libro *Introductio*. le siguieron dos grandes obras matemáticas, que en cierta manera completan la visión que Euler tenía del Análisis.

- En 1755 publica las *Institutiones calculi differentialis*.
- En 1763, le escribe a su amigo Golbach y le informa que había finalizado una obra trascendental, titulada *Institutiones Calculi Integralis*, publicada en dos tomos, el primero ve la luz el año 1768 y el segundo en 1770.

1766-1783. SEGUNDA ESTANCIA EN LA ACADEMIA DE CIENCIAS DE SAN PETERSBURGO

Mientras tanto en el gran Imperio ruso la situación política se fue apaciguando y estabilizando. La zarina Catalina II deseosa de que el prolífico matemático volviese a ocupar su lugar en la Academia de San Petersburgo, le ofreció unas condiciones muy ventajosas, tanto para él como para su familia. Catalina no tuvo que esperar mucho. Debido al ambiente poco estimulante en Berlín y a pesar del clima ruso, Euler regresó a Rusia a mediados del verano de 1766; al llegar a territorio ruso Catalina II le organizó una fastuosa bienvenida digna de un monarca y además puso a su disposición una magnífica vivienda, en la que se instalaron cómodamente su numerosa familia y acompañantes.

Al poco de llegar a San Petersburgo, 1766, perdió la visión del ojo izquierdo, y por tanto se quedó ciego; pocos años más tarde, en 1773, enviudó; volviéndose a casar con una hermanastra de su difunta esposa. Estas desgracias supusieron para Euler un gran contratiempo, pero a pesar de la ceguera y la pérdida de su compañera no le faltaron fuerzas y ánimo para continuar con su extraordinaria producción hasta el 18 de septiembre de 1783, día en el que murió de manera repentina, mientras estaba calculando la órbita del planeta Urano.



Leonhard Euler

Durante la estancia en San Petersburgo trabajó de manera asombrosa, se calcula que en ese periodo de diecisiete años escribió la mitad de toda su producción científica. A modo de ejemplo mostramos algunos de sus trabajos:

- En todo ese periodo obtiene multitud de resultados relacionados con la teoría de números. Como curiosidad en una memoria publicada en 1772 presentó una serie de polinomios que dan lugar a números primos. Por ejemplo:

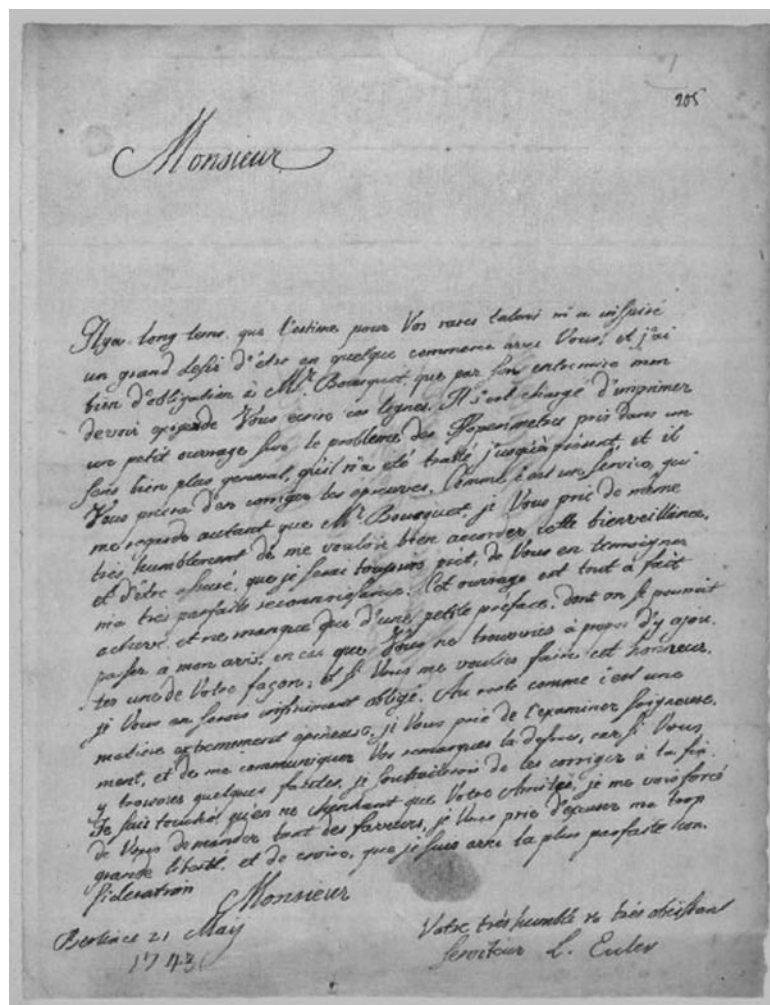
La función $f(n) = n^2 - n + 41$ obtiene primos para todos los valores naturales comprendidos entre 0 y 40.

- También se preocupó por resolver problemas en el campo de la óptica geométrica; todos los artículos relacionados con este tema los coleccionó en un tratado titulado *Dioptricae* (1769). Con esta obra, Euler se convirtió en el precursor de los fenómenos de interferencia y difracción de la luz, aspectos que fueron definitivamente resueltos por el científico A. Fresnel (1788-1827).
- Sin duda su gran obra, en este periodo, fue la redacción de un tratado sobre *Álgebra* (1770). Esta obra la escribió estando totalmente ciego y por tanto tuvo que dictarla, curiosamente a una persona que no sabía apenas matemáticas. Tanto por su estilo didáctico como por la ordenación de los temas el *Álgebra* ha sido utilizada, durante muchos años, como un modelo a seguir en posteriores libros de matemáticas. La obra consta de dos volúmenes, el primero de los tomos trata de sentar las bases del álgebra, mientras que el segundo está destinado al análisis diofántico.
- Otra rama de las matemáticas en la cual dejó huella fue la trigonometría esférica. Los principales resultados los presentó en dos memorias publicadas el año 1773.
- El interés por las series fue una constante a lo largo de su vida. Algunos de los resultados obtenidos por Euler no son correctos, en muchas ocasiones sus razonamientos y cálculos condujeron a paradojas. Este hecho trajo como consecuencia que varios matemáticos y filósofos empezaran a cuestionar el método empleado por Euler y su manipulación de series de una manera ingeniosa pero tan poco rigurosa. Esta crítica condujo a que se introdujera un nuevo enfoque a partir del concepto de límite. Entre los más destacados artífices de esta nueva forma de abordar los problemas, están Gauss, Abel y Cauchy.
- Citemos por último las aportaciones realizadas por Euler en campos como el cálculo de diferencias finitas, la solución de ecuaciones diferenciales y en derivadas parciales, el trabajo con los llamados coeficientes de Fourier de cara a resolver multitud de problemas, etc.

Las aportaciones de L.Euler a las matemáticas han sido enormes, no en vano se le ha calificado como "el matemático más prolífico de todos los tiempos". A lo largo de su vida publicó más de 500 libros y artículos. Añadiendo su obra póstuma, se alcanza la cifra de 886 trabajos. Se calcula que sus obras completas, superarán probablemente los noventa grandes volúmenes. Si dividimos el número de páginas entre los años vividos (a partir de los 20 años), nos da una producción de unas 800 páginas anuales de promedio. Podemos decir con toda rotundidad que ningún matemático ha superado jamás la producción de este hombre, al que Arago llamó *El Análisis Encarnado*.

BIBLIOGRAFÍA

- Castro Chacid, I.**, 1996: *Leonhard Euler*. Grupo Editorial Iberoamericano. México D. F.
- Dunham, William**, 2000: *Euler el maestro de todos los matemáticos*. Ed. NIVOLA. Madrid.
- Dunham, William**, 1993: *Viaje a través de los genios*. Ed Pirámide. Madrid.
- Durán A. J.**, 1996: *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo*. Alianza Univ. Madrid.
- EULER, L.**, 2003: *Introducción al Análisis de los infinitos*. Edición crítica con facsímil de A. Durán de la obra de Euler *Introductio in Analysin Infinitorum*. RSME. SAEM. Thales. Sevilla.
- Fuss, Nicolas**. Eulogy of Leonhard Euler
<http://www.math.dartmouth.edu/~euler/historica/fuss.html>
- Las obras de Euler on-line: <http://www.math.dartmouth.edu/~euler/>



Carta escrita por L. Euler el año 1743