

# MATEMÁTICAS Y PAPIROFLEXIA

JOSÉ IGNACIO ROYO PRIETO (\*)

## Resumen

*La papiroflexia es el arte de hacer figuras reconocibles utilizando papel plegado. En esta exposición se muestran algunos aspectos de la papiroflexia en los que las matemáticas tienen un papel destacado.*

## 1. INTRODUCCIÓN

### 1.1. QUÉ ES LA PAPIROFLEXIA

La papiroflexia es el arte de hacer figuras reconocibles utilizando papel plegado. Según la corriente más ortodoxa de la papiroflexia, tan sólo está permitido plegar el papel, sin usar tijeras ni pegamento. Además, se deberá utilizar como punto de partida un único trozo de papel cuadrado. A pesar de que estas normas puedan parecernos muy restrictivas, las posibilidades que nos ofrece la papiroflexia son casi infinitas.



Maitreya (Hoyjo Takashi)

Los diseños más populares son, sin duda, la pajarita de papel, el gorro de papel y el barquito, así como algún que otro avión. Estos diseños son muy simples, pero en las últimas décadas, papiroflexistas de todo el mundo han desarrollado técnicas a cual más compleja para obtener modelos de muchas puntas. Coches, barcos, aviones, muebles, leones, perros, insectos con todas sus patas y antenas, mamíferos con todo tipo de cuernos, orejas y colas, dragones, dinosaurios, esqueletos, pulpos, peces, crustáceos, arañas, seres humanos, máscaras... Seres animados e inanimados, reales y fantásticos, sencillos y con todo lujo de detalles forman parte del inmenso repertorio de la papiroflexia moderna.



Origami

### 1.2. UN POCO DE HISTORIA

El origen de la papiroflexia hemos de situarlo en Japón. La palabra japonesa para la papiroflexia es *origami*. Su escritura está compuesta por dos caracteres: En el primero, el radical de la izquierda deriva del dibujo de una mano, y significa doblar (*ori*). El segundo deriva del dibujo de la seda, y significa papel (*kami*).

(\*) Profesor del Departamento de Matemáticas. Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea



Composición de grullas del *Sembazuru Oriката*

La historia de la papiroflexia (ver [Engel]) comienza junto con la del papel, en China, allá por el siglo I ó II, y llega a Japón en el siglo VI. En un principio, era un divertimento de las clases altas, pues eran las únicas que podían conseguir papel, que constituía un artículo de lujo. Los guerreros *Samurai* intercambiaban regalos adornados con *noshi*, trozos de papel doblados en abanicos de variadas formas, sujetos con cintas de carne seca. Hoy en día, se mantiene la expresión *origami tsuki*, que significa “certificado”, o “garantizado”, y que deriva del plegado especial con el que se preparaban los diplomas que recibían los maestros de las ceremonias de té. Dicho plegado garantizaba que no se pudiera volver a plegar en su forma original sin realizar nuevas cicatrices en el papel.

En el período Muromachi (1338-1573), el papel era un producto más accesible, y surgieron ciertos adornos de papiroflexia con significados distintos que revelaban, por ejemplo, la clase social de cada persona, de modo que, según el distintivo de papiroflexia que llevase un individuo, se podía distinguir si era un granjero, un guerrero samurai o un seguidor de tal o tal maestro filósofo.

La “democratización” de la papiroflexia se dio en el período Tokugawa (1603-1867), el cual conoció una gran explosión cultural. Es en este período en el que surge la base pájaro, la base usada por la grulla (*zuru*), que es la figura más popular en Japón, tal como lo es aquí la pajarita. Dos libros legendarios recogen las primeras instrucciones de plegado: el *Sembazuru Oriката* (Cómo Plegar Mil Grullas) en 1797, y el *Kan No Mado* (Ventana abierta a la estación de invierno), de 1845, en el cual aparece por primera vez la base de la rana.



Miguel de Unamuno (Zuloaga)

No sólo se dobló en Japón. Los musulmanes también practicaron la papiroflexia, y si no hubiera sido por los Reyes Católicos y el Cardenal Cisneros, a buen seguro la tradición de doblar papel en la península ibérica hubiera tenido muchísima más repercusión en nuestros días. La pajarita (o *pájara pinta*, llamada así porque cuando es plegada con un papel de colores distintos por ambas caras aparece con la cabeza de un color distinto que el cuerpo) forma parte de la cultura popular española desde, por lo menos, el siglo XVII. El gran impulsor de la papiroflexia a principios de siglo fue el universal bilbaíno Miguel de Unamuno y Jugo. Tras visitar la Exposición Universal de París de 1889, junto a la inauguración de la Torre Eiffel, Unamuno descubre maravillado una exposición de origami de Japón. A su vuelta, retomaría su afición a doblar pajaritas, según él, *cocotología*, creando su propia “escuela” de plegadores. El genial escultor anarquista oscense Ramón Acín (1888-1936) ha sido uno de los que ha rendido homenaje a la pajarita con su famosa “Pajarita sobre cubo”, escultura de piedra que podemos apreciar en un parque de Huesca.

El patriarca de la papiroflexia moderna es el japonés Akira Yoshizawa, una leyenda viva de los maestros orientales de Origami. Es a Yoshizawa a quien debemos la simbología actual de las instrucciones de plegado de los modelos (Sistema Yoshizawa-Randlett, 1956). Esto ha constituido, sin lugar a duda, la aportación más importante a la papiroflexia desde la invención del papel, ya que ha permitido la difusión internacional de las distintas creaciones, al no importar



Akira Yoshizawa y dos elefantes de su creación

el idioma en el que estén escritos los desarrollos. Para Yoshizawa, el Origami conlleva una filosofía de la vida, y pertenece a ese estado de la luz que en filosofía oriental se denomina *ke*, concepto asociado a la luz baja, las sensaciones íntimas y la armonía en silencio, por oposición al *hare*, que denota la explosión de luz, brillantez y la espectacularidad. Yoshizawa reza, medita, estudia y siente en un sentido ciertamente religioso cada animal, rostro o figura que va a plegar. Se dice que pasó varios años observando a un cisne que vivía en el estanque de su casa hasta que decidió plegarlo. Según la escuela de Yoshizawa, el plegado es un diálogo entre el artista y el papel, el cual hay que realizarlo en el aire, sólo con las manos, ya que de apoyarlo en la mesa, estaríamos transmitiendo a la futura figura el *yin* de la mesa en lugar del propio. En Japón, Yoshizawa es considerado como una divinidad, y sus figuras rezuman vida, transmitiendo una sensibilidad asombrosa.

La papiroflexia ha experimentado una auténtica explosión de creatividad en las tres últimas décadas, debido a la mejor comunicación de los modelos, y también al desarrollo de técnicas para realizar figuras cada vez más complejas. Según P.Engel (ver [Lang1]), en los 80 podemos señalar dos corrientes en la papiroflexia moderna:

- Por un lado, tenemos la escuela japonesa, donde la papiroflexia ha sido cultivada por artistas no científicos. La filosofía consiste aquí en expresar, sugerir, captar la esencia de lo que se quiere representar con un mínimo de pliegues, aunque la figura resultante no sea anatómicamente perfecta;
- Por otro lado, la escuela occidental, donde la papiroflexia ha sido desarrollada por matemáticos, ingenieros, físicos, arquitectos... Se persigue la exactitud anatómica, es decir, representar los insectos con todas las patas, pestañas, cuernos, alas... Para ello se han desarrollado multitud de métodos matemáticos.

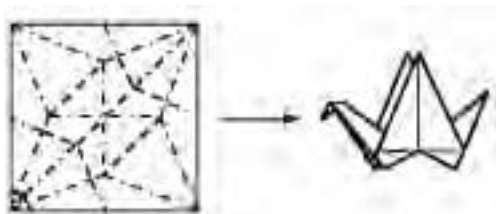


Avispa (Satoshi Kamiya)

Hoy en día no se puede hacer tal distinción, ya que japoneses científicos como Toshikuyi Meguro, Jun Maekawa, Issey Yoshino, Seiji Nishikawa, Fumiaki Kawahata, Tomoko Fuse, Toshikazu Kawasaki y otros muchos, integrantes del grupo *Origami Tanteidan* (Detectives de la Papiroflexia) han diseñado modelos de increíble complejidad. En estos momentos, más bien se puede distinguir entre los que usan técnicas geométricas de diseño (sumando a los anteriores a los americanos John Montroll y Robert Lang, y el madrileño J. Aníbal Voyer, entre otros), y los que buscan la expresividad en otros elementos, tales como la textura del papel, la suavidad de los dobleces y la observación del modelo a representar. Estos últimos utilizan la técnica del papel humedecido, de la cual son especialistas Akira Yoshizawa, el americano Michael Lafosse, el francés Eric Joisel, el italiano David Derudas y el británico David Brill.

Otra rama de la papiroflexia moderna es la *papiroflexia modular*, o *unit origami*, en el cual se pliegan varias piezas sencillas independientemente para acabar encajándolas (sin pegamento, por supuesto) con el fin de formar un motivo casi siempre geométrico. Los pioneros de esta modalidad de origami son Robert Neale y Lewis Simon, (EEUU, década de los 60), si bien quien más ha impulsado esta modalidad es la genial japonesa Tomoko Fuse.

### 1.3. RELACIÓN DE LA PAPIROFLEXIA CON LAS MATEMÁTICAS



Pájaro aleteador con su mapa de cicatrices

La mejor manera de darse cuenta de la relación entre las matemáticas y la papiroflexia es desplegar un modelo y observar el cuadrado inicial: aparece ante nuestros ojos un complejo de cicatrices que no es sino un grafo que cumple unas ciertas propiedades. Intuitivamente, hay unas “matemáticas del origami” funcionando cuando plegamos un modelo. En este trabajo señalaremos tres aspectos fundamentales en los cuales la matemática aflora en la papiroflexia:

- 1) **Papiroflexia modular:** representación de poliedros y figuras geométricas;
- 2) **Axiomas de constructibilidad** teoría de puntos constructibles con Origami, paralela a la existente con regla y compás;
- 3) **Diseño de figuras:** métodos matemáticos para la creación papirofléctica.

La intención de esta exposición es que sea una miscelánea agradable, ilustrativa y divulgativa sobre un tema que es muy poco conocido, pero atractivo. También quiere ser una prueba más de que las matemáticas son cultura.

## 2. PAPIROFLEXIA MODULAR: CONSTRUCCIÓN DE POLIEDROS

### 2.1. DOS COSITAS SOBRE POLIEDROS

Un poliedro se puede definir como un conjunto conexo de  $\mathbb{R}^3$  formado por un número finito de polígonos planos que se juntan de una manera *razonable*. Aquí “razonable” quiere decir que cada lado de un polígono pertenece exactamente a otro polígono del poliedro, y de manera que los polígonos que concurren en cada vértice formen un circuito simple (para evitar anomalías tales como el caso de dos pirámides unidas por el vértice). Los polígonos son llamados *caras*, y sus lados, *aristas*. Un poliedro es, por lo tanto, una superficie cerrada (no diferenciable, pues tiene aristas y vértices), y divide al espacio en dos partes: una no acotada y otra acotada a la que llamaremos *interior*. El caso más importante



Dodecaedro y dodecaedro estrellado (Tomoko Fuse)

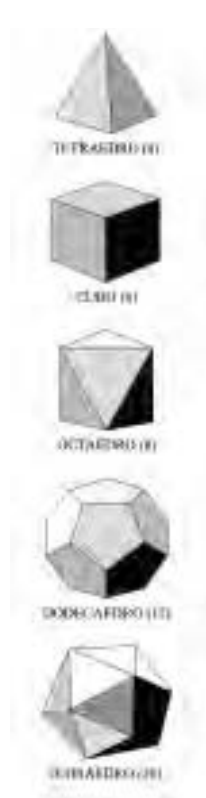
es el de los poliedros convexos, en el cual el interior es un conjunto convexo, (es decir, tal que el plano que contiene a una cara no penetra en el poliedro), de modo que podemos definirlo en coordenadas cartesianas mediante un sistema de desigualdades:

$$a_i x + b_i y + c_i z \leq d_i, \forall i = 1, \dots, C$$

siendo  $C$  el número de caras. Ejemplos de poliedros son una caja de zapatos, una pirámide, un cubo, un tetraedro...

Los poliedros más famosos son, sin duda, los llamados *sólidos platónicos*. Se dice que un poliedro convexo es *regular* si sus caras son polígonos regulares idénticos y si en cada vértice concurre el mismo número de aristas. Sorprendentemente, tan sólo existen cinco: el tetraedro, el cubo, el octaedro, el icosaedro y el dodecaedro. Este resultado se atribuye a Teeteto (425-379 a.C.), de la escuela de Platón. Existen pruebas elementales de este resultado, pero la forma elegante de hacerlo es utilizar la famosa fórmula de Euler, de la que más adelante hablaremos. Platón en su libro *Timeo* (ap. 55-56) atribuye a cada uno de estos sólidos uno de los cuatro elementos en el pasaje en el que describe la creación del universo. Así, el tetraedro es el fuego, el octaedro, el aire, el cubo es la tierra y el icosaedro, las moléculas de agua. Finalmente, relata cómo el Creador utilizó el dodecaedro para formar el universo. Esta es la razón por la cual se les conoce como sólidos platónicos.

Los poliedros son entes matemáticos que brotan de la forma más insospechada en distintos ámbitos de nuestra vida: desde las pirámides de Egipto hasta los cubos en los que cristaliza la pirita, pasando por los balones de fútbol. Han fascinado a los matemáticos y las matemáticas, que se han dedicado a su estudio desde la antigua Grecia, y constituyen hoy en día motivo de investigación activa. Entre los muchos que se han ocupado de su estudio cabría citar a Arquímedes, Kepler, Descartes, Euler, Cauchy, Steinitz, Alexandrov, Weil, Coxeter, Schläffi y Banchoff, dejándonos a muchos por el camino. Una referencia obligada sobre poliedros es [Cox]



Sólidos Platónicos

## 2.2. Papiroflexia modular

Como hemos comentado antes, la papiroflexia modular consiste en hacer figuras utilizando varios papeles que darán lugar a piezas individuales que llamaremos *módulos*. Cada uno de estos módulos posee solapas y bolsillos, que se usan para ensamblarlos entre sí. Es usual representar de esta manera figuras geométricas, y que el plegado de cada módulo sea sencillo. Los poliedros son la principal fuente de inspiración de esta modalidad, aunque no la única.

Aparte del valor artístico y estético de la papiroflexia modular, su interés para con las matemáticas es doble:

- 1) Nos permite la representación física de entes abstractos. En este sentido, tiene el mismo interés que puede tener un programa de ordenador que dibuje poliedros, si bien es mucho más revelador tener en la mano un icosaedro, palparlo y girarlo, que

verlo en una pantalla donde simulamos su giro. Para este fin, hay también recortables y figuras de plástico, aunque a decir verdad, la posibilidad práctica de representar poliedros con origami son mucho mayores que con recortables.

- 2) Tanto en el diseño como en el plegado y ensamblaje de los módulos, se experimentan de una forma muy sencilla las propiedades de los poliedros tales como grado de un vértice, regularidad y simetría, ya que en su diseño intervienen de forma decisiva los conceptos de arista, índice, cara, vértice, y otros más sofisticados como dualidad, colorabilidad, característica de Euler-Poincaré e incluso curvatura (en el sentido que veremos más adelante).

En este apartado, vamos a ver diversos tipos de módulos y de poliedros, y analizaremos la enjundia matemática que acompaña a su diseño y su hechura. A medida que vamos viendo modelos, veremos como nos surgirán cuestiones matemáticas que nos harán acercarnos a diversos resultados matemáticos sobre poliedros.

### 2.3. FAMILIAS DE MÓDULOS

Se puede hacer una clasificación de los modulares, fijándonos en la estructura del poliedro que forman, o mejor dicho, dependiendo de en qué se fije uno para describir un poliedro: los vértices, las aristas o las caras. ¿Qué es, al fin y al cabo, un tetraedro? Podemos definirlo como cuatro vértices equidistantes, o como seis segmentos dispuestos de una determinada manera, o como cuatro caras triangulares. En una vuelta de tuerca sorprendente, un cubo puede definirse como un tetraedro estrellado. Todo esto es fácil de experimentar con la papiroflexia. Según esto, distinguimos tres tipos de módulos:



Octaedro con el módulo giroscopio

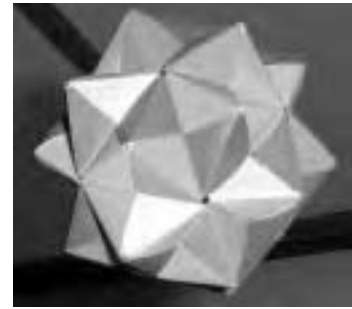
- 1) **Módulos basados en las aristas.** Suelen ser los de ensamblaje más sólido. Cada módulo corresponde a una arista, lo cual hay que tener en cuenta a la hora de diseñarlos. Por lo general, suelen presentar caras perforadas, que nos permiten ver el interior.
- 2) **Módulos basados en las caras.** Parece lo más natural, pero no siempre es lo más fácil de diseñar en papiroflexia. Los empalmes suelen ser más débiles, lo cual se debe a que las caras se juntan entre sí de dos en dos, mientras que las aristas se juntan de más en más en cada vértice.
- 3) **Módulos basados en los vértices.** Los más importantes son de tipo giroscopio (ver [SAG]). Muy versátiles y resultones. Dentro de este tipo, se pueden clasificar por el grado: los que agrupan aristas de 3 en 3, de 4 en 4...

### 2.4. Módulos de tipo SONOBÈ: poliedros ESTRELLADOS

Son probablemente los módulos más populares y se deben al japonés Mitsunobu Sonobè. Estos módulos se juntan de 3 en 3 para formar una pirámide con base un triángulo equilátero y con ángulos rectos en el vértice. Son, por lo tanto, muy adecuados para construir poliedros

estrellados cuyas caras son triángulos (icosaedro estrellado, octaedro estrellado...).

Podemos considerar que estos módulos pertenecen la familia de las caras, pero no sólo los podemos usar con caras triangulares: podemos juntarlos de 4 en 4, obteniendo como base un cuadrado y sobre él, lo que podríamos denominar una estrellación de segunda especie (cuatro pirámides cuyas bases no caen en un plano). De la misma manera, juntándolos de diversas maneras podemos obtener polígonos con estrellaciones muy barrocas, donde las caras aparecen de una manera más especial, pero con su sentido artístico y estructural (ver [Kasa]).



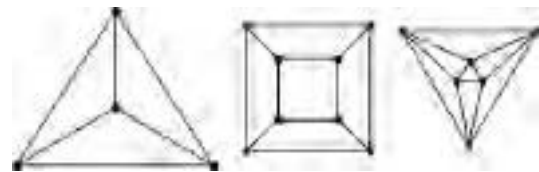
Icosaedro Estrellado con módulos Sonebè

## 2.5. COLORACIÓN

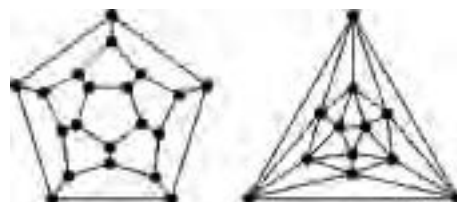
Un reto interesante sobre el módulo Sonobè consiste en colorear sus caras de una forma coherente. Para abordar esto, nos será útil el concepto de *grafo* de un poliedro.

### 2.5.1. Grafo de un poliedro

Sin querer ser demasiado preciso, un grafo es un complejo finito de vértices y aristas. Un grafo es *plano* si se puede dibujar en  $\mathbb{R}^2$  de modo que las aristas no se corten, tan sólo pueden juntarse en los vértices. En un grafo, consideraremos vértices, aristas y caras. Llamaremos *grado de un vértice* al número de aristas que concurren en él. A todo poliedro podemos asociar de forma fácil un grafo plano. Basta tomar una cara y realizar una suerte de proyección estereográfica en el plano. Por supuesto, consideramos la componente no acotada como una cara.



Grafos de los sólidos platónicos



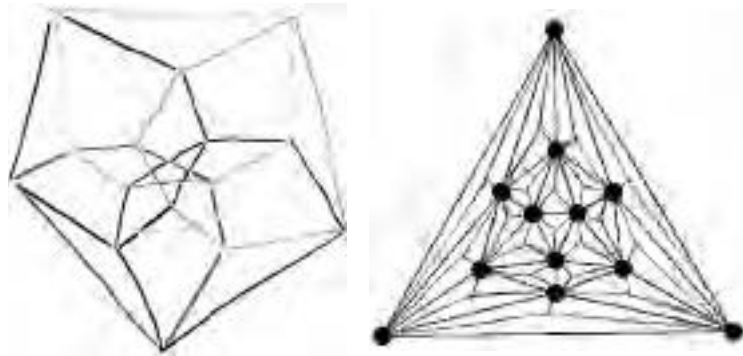
Una ventaja de los grafos es que nos permite estudiar los poliedros de una forma más fácil que representándolos en el espacio.

### 2.5.2. Coloración de isocaedros

Entendemos por una *buena coloración* a la asignación de colores a los vértices, aristas o caras de modo que cumplan alguna regularidad, por lo general, del tipo de que elementos contiguos tengan colores distintos.

Para pensar en una coloración del icosaedro estrellado con módulos Sonobè, habrá que conseguir su grafo a partir del de nuestro icosaedro, sin más que unir en cada uno de sus triángulos

el punto medio con sus vértices. El grafo que así obtenemos es el de un triacontraedro. Como éste es dual del icosidodecaedro, nos basta colorear las aristas de éste último. Si nos fijamos en los módulos de Sonobè, además, tenemos que por cada módulo, coloreamos dos aristas “contiguas” del icosaedro estrellado. Esto nos sugiere construir seis circuitos de colores de la forma en que vemos en la ilustración, obteniendo seis “círculos máximos” sobre el icosaedro estrellado. Volviendo al módulo de Sonobè, si quiero hacer una coloración con tres colores, he de elegir los circuitos máximos de dos en dos, y en los puntos de cruce de ambos circuitos, dejar que pase el uno sobre el otro, y el otro sobre el uno. De esta forma, obtenemos un arlequinado del icosaedro estrellado Sonobè tal que en cada vértice se unen los tres colores. Como vemos, para colorear un icosaedro estrellado, hay que pensar en un icosidodecaedro.



Seis ciclos en un icosidodecaedro; Grafo del triacontaedro.

### 2.5.3. Dualidad

Otro concepto que se puede representar con la papiroflexia es la dualidad de poliedros. Dado un poliedro, podemos tomar los puntos medios de cada cara, y unir los de caras contiguas. Sorprendentemente, mediante este procedimiento obtenemos un nuevo poliedro. Para comprender mejor la idea, vamos a expresarla con grafos: se construye el dual de un grafo como el grafo que tiene como puntos los puntos medios de cada cara, y que tiene como aristas las aristas que resultan de unir los puntos pertenecientes a caras contiguas, atravesando las aristas originales. Poliedros duales corresponden a grafos duales. La relación “ser duales” es recíproca.



Dualidad icosaedro-dodecaedro

De este modo, se puede comprobar que el dual del tetraedro es el mismo tetraedro, el dual del icosaedro es el dodecaedro, y el dual del cubo es el octaedro. En papiroflexia podemos representar esa dualidad valiéndonos de que los módulos de tipo arista del dodecaedro tienen agujeros, además de usar un material transparente como lo es el acetato.

## 2.6 CINCO TETRAEDROS INTERSECADOS

Vamos a construir un objeto muy venerado por matemáticos y papiroflexistas. Si tomamos en un dodecaedro cuatro vértices equidistantes, obtendremos un tetraedro. Como tenemos exactamente veinte vértices, podemos insertar cinco tetraedros en el dodecaedro. Este objeto se puede construir en papiroflexia, y constituye un complejo y entretenido rompecabezas (ver [Hull1]). Para resolverlo, hay que fijarse en las mil y una simetrías de este objeto. La clave para

la construcción consiste en que si tomamos cualesquiera dos de estos tetraedros, un vértice de uno de ellos sale exactamente por el medio de una cara del otro, y lo mismo pero intercambiando los papeles ocurre en la parte opuesta. Con este objeto se puede visualizar que el grupo de rotaciones del dodecaedro es grupo alternado de cinco letras. Esto resulta de que al girar el dodecaedro estamos intercambiando los cinco tetraedros entre sí.



Cinco tetraedros intersecados

Hay otras composiciones realizables con papiroflexia, como los cinco octaedros que hay insertados en un icosidodecaedro. En cambio, la composición de cinco cubos que hay en un dodecaedro presenta una dificultad añadida, pues las aristas de esos cubos se intersecan, y no podríamos usar la técnica de los módulos tipo arista que hemos usado para los tetraedros.

## 2.7. BALONES DE FÚTBOL O FULLERENOS

### 2.7.1. El objeto

Si miramos con atención un balón de fútbol, veremos que está formado por hexágonos y pentágonos, de modo que en cada vértice se juntan dos hexágonos y un pentágono. Podemos contar con cuidado y comprobar que tiene 12 pentágonos. Contar los hexágonos del balón parece más complicado, pero podemos valernos su estructura: si contamos por cada pentágono sus cinco hexágonos adyacentes, obtenemos 60 hexágonos, pero cada uno de estos, al tocar a 3 pentágonos, lo hemos contado 3 veces, de modo que en realidad hay 20 hexágonos. El balón de fútbol es un poliedro *semirregular* (son como los regulares, pero usando dos tipos de polígonos; hay sólo 13 y se llaman *arquimedianos*), y su auténtico nombre es *icosaedro truncado*.

### 2.7.2. Fullerenos

Un *fullereno* es un poliedro formado por pentágonos y hexágonos, de modo que todos los vértices son de grado 3. Su nombre está puesto en honor al arquitecto Richard Buckminster Fuller (1895-1983), que construyó un pabellón esférico futurista con esa estructura en la Exposición Universal de Montreal de 1967. Más tarde, se ha llamado fullereno a la tercera forma alotrópica del carbono (las otras dos son el diamante y el grafito), y ha resultado ser una forma extraordinariamente estable, descubierta en 1985 y cuyo descubrimiento fue merecedor de un premio Nobel. Las moléculas del fullereno usual tienen 60 átomos de Carbono colocados en los vértices de un balón de fútbol, pero hay muchos más fullerenos. Para construir fullerenos de papiroflexia es muy adecuada la pieza en zig-zag de Tom Hull (ver [Hull1]), pues cada módulo representa una arista y las aristas se juntan de tres en tres (ver dibujo en el apartado 2.9).



Icosaedros truncados con módulos de vértices y aristas

## 2.8. CARACTERÍSTICA DE EULER

Una de las propiedades más valiosas de los poliedros es una fórmula atribuida a Euler, aunque anteriormente Descartes había encontrado una fórmula equivalente, que apareció 200 años después de ser escrita, entre los papeles de Leibnitz. Es el siguiente y bonito teorema:

**Teorema (Fórmula de Euler):** Sea un poliedro homeomorfo a una esfera con  $V$  vértices,  $A$  aristas y  $C$  caras. Entonces, se cumple la fórmula:

$$V-A+C=2.$$

Podemos comprobar esta fórmula con los sólidos platónicos, con el balón de fútbol y con los poliedros estrellados que hemos visto aquí. Esta fórmula también la cumplen los grafos planos. De hecho, la propiedad es topológica: si hacemos cualquier triangulación sobre una esfera o sobre un espacio homeomorfo, se seguirá cumpliendo la fórmula. Se puede asociar a cada espacio topológico "razonable" un número llamado *característica de Euler-Poincaré*, que se define como la suma alternada de sus números de Betti. Es un invariante topológico importantísimo, y generaliza la suma alternada que antes hemos expresado como "vértices menos aristas más caras". En este sentido, la fórmula de Euler dice ni más ni menos que la característica de Euler-Poincaré de la esfera es 2. Con la característica de Euler-Poincaré es fácil probar, por ejemplo, el teorema de Teeteto sobre los cinco sólidos platónicos.

Volviendo a nuestros fullerenos, si llamamos  $H$  al número de hexágonos y  $P$  al número de pentágonos, podemos calcular cuántos vértices, aristas y caras hay. Explícitamente,

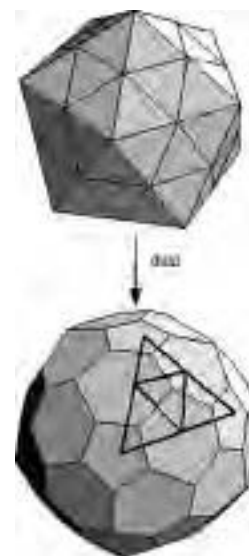
$$V = \frac{5P + 6H}{3}; A = \frac{5P + 6H}{2}; C = P + H$$

Si sustituimos ahora en la fórmula de Euler, obtenemos fácilmente

$$\frac{5P + 6H}{3} - \frac{5P + 6H}{2} + (P + H) = 2 \quad . \quad P=12$$

y concluimos  $P=12$ , de modo que sea lo grande que sea el fullereno, las condiciones que le hemos puesto fuerzan a que haya siempre 12 pentágonos, si bien no hemos obtenido ninguna condición sobre los hexágonos. De hecho, podemos interpretar el dodecaedro como un fullereno sin hexágonos. Un método para generar fullerenos es truncar un icosaedro (tiene 12 vértices, de donde obtenemos los 12 pentágonos) y subdividir las caras triangulares en nuevos triangulitos más pequeños. Calculando el dual de este grafo, obtenemos un nuevo poliedro que es un fullereno.

Cabe preguntarnos si estas construcciones son meramente topológicas, es decir, si los grafos que construimos tienen una realización en un poliedro convexo real. No tenemos aparentemente ninguna razón para pensar que para todo grafo vaya a suceder eso. Es clara la existencia de un poliedro "esférico" que realice cada grafo, pero otra cosa es que las caras que obtengamos sean planas. Aunque nuestros fullerenos podamos construirlos efectivamente con papiroflexia (ver [Hull1]), a uno le podría quedar la duda de si está



Construcción de fullerenos

construyendo poliedros “de verdad” o si es la flexibilidad del papel la que nos los permite construir, no yaciendo cada cara en un plano. Para responder a esta cuestión, tenemos el siguiente y clásico teorema:

**Teorema [Steinitz]** Un grafo representa a un poliedro convexo de  $\mathbb{R}^3$  si y sólo si es plano y 3-conexo.

La propiedad de ser 3-conexo significa que hay que quitar por lo menos tres vértices al grafo plano para dividirlo en dos componentes conexas. Así que como nuestros fullerenos tienen grafos planos y 3-conexos, nos quedamos tranquilos. Otra cuestión es saber cuándo un grafo se puede realizar como un poliedro inscribible en una esfera. Esta cuestión se conoce como *Problema de Steinitz* y ha obtenido recientemente respuestas parciales con métodos de geometría computacional.

### 2.9. TOROS MODULARES

Un toro es el nombre matemático por el que se conoce a la superficie de un flotador o un donuts. Viene del griego *torew*, que significa agujero, perforar. Vamos a ilustrar el interés matemático de la construcción de un toro de papiroflexia con una anécdota personal. La historia empieza al conseguir una foto en internet de un toro modular, diseñado por el italiano Roberto Gretter con las mismas piezas zig-zag de Hull. Como con los fullerenos, podemos contar cuántos pentágonos y hexágonos iban a ser necesarios. La característica de Euler-Poincaré del toro es 0, con lo cual, aplicando la fórmula de Euler para toros:



Toro modular

$$V - A + C = 0,$$

y sustituyendo con el número H de hexágonos y P de pentágonos, obtenemos:

$$\frac{5P + 6H}{3} - \frac{5P + 6H}{2} + (P + H) = 0 \quad . \quad P = 0!!!$$

con lo que llegamos a que no se puede construir un toro con hexágonos y pentágonos de 3 en 3, esto es una restricción topológica. Sin embargo, en el toro de la foto claramente se le adivinan pentágonos en la parte exterior. El error consistió en no haberse percatado de que, además de pentágonos y hexágonos, el toro por la parte interna tenía heptágonos. Teniendo esto en cuenta, la fórmula de Euler nos proporciona:

$$\frac{5P + 6H + 7Hp}{3} - \frac{5P + 6H + 7Hp}{2} + (5P + 6H + 7Hp) = 0 \quad . \quad P = Hp,$$

con lo que la condición es que haya el mismo número de heptágonos que de pentágonos. Con ese dato, y calculando que hubiera 10 pentágonos en la composición, es un entretenido rompecabezas construir un toro modular.

Como vemos, la discusión matemática previa al diseño es exclusivamente topológica (hemos utilizado el género de la superficie que queremos conseguir). No hemos obtenido un poliedro,

pues salta a la vista que las caras que tenemos no son planas. No obstante, la enjundia de este modelo no es sólo topológica, sino también geométrica.

Podemos fijarnos en que el toro tiene los 10 pentágonos por fuera y los heptágonos por dentro. El toro usual con la métrica usual, sabemos que tiene curvatura positiva por fuera (se asemeja a un balón), negativa por dentro (se asemeja a una silla de montar) y como la curvatura es una aplicación continua, se tiene que anula entre medio. De hecho, por fuera, los pentágonos están rodeados de hexágonos, lo cual nos puede recordar al balón de fútbol. Ciertamente, la coloración del toro está en función de la curvatura: roja allá donde es positiva, morado donde es negativa, y amarillo cuando más se acerca a cero.

La razón por la cual nuestro toro modular adquiere esta curvatura no es topológica, sino geométrica, y de hecho se debe a la forma que tienen los módulos que estamos empalmando. Al formar un heptágono con los módulos zig-zag, vemos que adquiere por sí solo curvatura negativa, al plegar un hexágono, se puede posar tranquilamente sobre una mesa (curvatura cero), y al plegar un pentágono, las aristas adquieren curvatura positiva. Al analizar los empalmes de los módulos, vemos que forman pirámides que tiene como base un triángulo equilátero, y se unen desde la mitad del lado, como se ve en el dibujo. Si ponemos seis triángulos de esa manera, montan perfectamente. Si ponemos sólo cinco, nos falta un poco de ángulo para completar  $2\pi$  radianes. Eso que falta se puede interpretar como el *exceso de ángulo* en un punto interior del pentágono, y es lo que proporciona la curvatura positiva. Cuando ponemos siete triángulos, en vez de faltar, sobra ángulo, y eso es porque en el interior hay curvatura negativa.

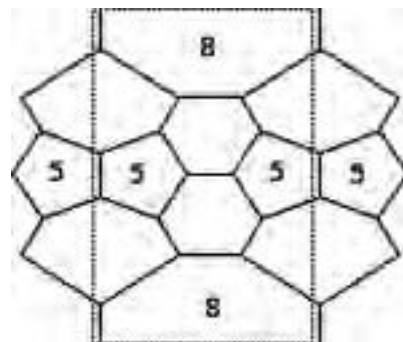


Pentágono y hexágono con módulos zig-zag de Hull

Un interesante reto consiste en diseñar toros con este mismo módulo usando la menor cantidad de piezas posible. El toro de Gretter tiene 555 piezas. Tom Hull y sus alumnos han diseñado diferentes modelos de 240, 105 y 81 piezas, llegando al límite de lo físicamente constructible. En vez de heptágonos, se usan octógonos y decágonos para dar curvatura negativa (cuanto menos piezas, menor tendrá que ser la curvatura, intuitivamente). La fórmula de Euler nos dice que tiene que tener el doble de pentágonos que de octógonos, y si usáramos decágonos, hay que usar 4 veces más pentágonos que decágonos.

### 3. CONSTRUCTIBILIDAD DE PUNTOS EN ORIGAMI

La papiroflexia, o mejor dicho, el ejercicio de doblar papel se puede usar con fines pedagógicos para estudiar e ilustrar la geometría elemental plana. Sobre ello hay numerosos libros, siendo una excelente referencia el de Sundara Row ([Row]), donde se proponen diversos ejercicios mediante los que se resuelven problemas referentes a cónicas, ecuaciones polinómicas y trigonometría utilizando tan sólo los dobleces del papel.



Dominio fundamental (Sarah Belcastro)

La clave consiste en interpretar geoméricamente qué estamos haciendo cuando doblamos el papel. Por ejemplo, cuando doblamos los dos lados que concurren en una esquina, uno sobre el otro, estamos calculando una bisectriz. Cuando llevamos un punto del papel sobre otro y doblamos, estamos trazando la mediatriz del segmento que definen los dos puntos. Con papiroflexia es sencillo dibujar un montón de rectas tangentes a una parábola dada por su foco y su recta directora, probar que el área de un triángulo es base por altura partido de dos, o sumar la serie  $\sum 1/2^n$ , sin más que hacer unos cuantos dobleces y pensar su significado. Las posibilidades pedagógicas del plegado son muchas, pero no entraremos en ello, sino más bien en analizar qué puntos son constructibles con origami, de la misma manera en la que se estudia qué puntos son constructibles con regla y compás.



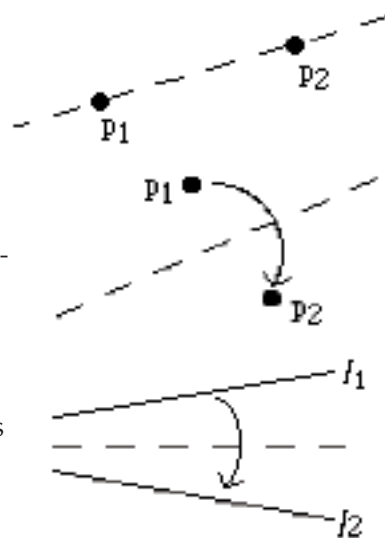
En 1995, D. Auckly y J. Cleveland publicaron una nota en el American Mathematical Monthly en la cual probaban que todo punto constructible con papiroflexia era constructible con regla y compás, pero que el inverso no era cierto. Sin embargo, tal y como hace notar Tom Hull en la misma revista (ver [Hull3]), hay un método desarrollado por el japonés Hisashi Haba en la década de los 70, mediante el cual se puede trisecar cualquier ángulo dado, con un par de pliegues que son perfectamente razonables en origami, tal y como vemos en la figura. ¿Dónde está la contradicción? Lo que ocurre es que a la hora de definir los números constructibles con papiroflexia, hay que realizar una axiomática de lo que consideramos “razonable” de obtener en papiroflexia plegando. En la literatura de la papiroflexia se pueden encontrar métodos para trisecar ángulos, duplicar cubos y doblar heptágonos regulares, todos ellos con pliegues sencillos.

Se debe al italo-japonés Humiaki Huzita la formulación de la axiomática más utilizada para definir los puntos constructibles con papiroflexia:

[O1] Dados dos puntos  $p_1$  y  $p_2$  constructibles, podemos construir la línea que los une;

[O2] El punto de coincidencia entre dos líneas constructibles es constructible;

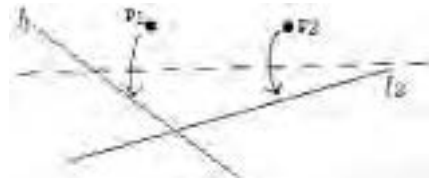
[O3] Dado un segmento delimitado por dos puntos constructibles, su bisectriz es constructible;



[O4] La bisectriz del ángulo formado por dos líneas constructibles es constructible;

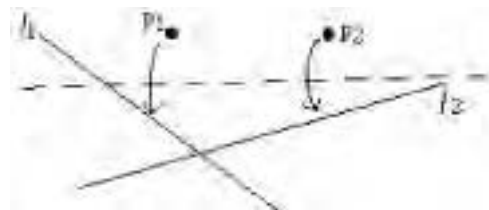


[O5] Dados dos puntos  $p1$  y  $p2$  y una línea  $l1$  constructible, la línea que pasa por  $p1$  y que refleja a  $p2$  sobre  $l1$  es constructible;



[O6] Dados dos puntos  $p1$  y  $p2$  constructibles, y dos líneas constructibles  $l1$  y  $l2$ , la línea que refleja a  $p1$  en  $l1$  y a  $p2$  en  $l2$ , si es que existe, es constructible.

Era conocido entre los griegos desde tiempos de Arquímedes que si se podían hacer dos marcas en una regla, entonces se podía conseguir la trisección del ángulo, de modo que dado que en un borde del papel se puede calcular  $1/2$ ,  $1/4$ ,  $1/8$  y así, no es sorprendente que se puedan hacer cosas en origami tales como trisecar ángulos.



Los cuatro primeros axiomas se pueden alcanzar con regla y compás. El quinto, también, y de hecho, los puntos constructibles con regla y compás son exactamente los mismos que los constructibles con los cinco primeros axiomas, y que es equivalente al menor subcuerpo del cuerpo de los números complejos  $\mathbb{C}$ , cerrado por raíces cuadradas. El sexto axioma es equivalente a la construcción de una tangente común a dos parábolas, exactamente a las definidas por  $p1, l1$  y  $p2, l2$ . Se puede probar que hacer esto es equivalente a resolver una ecuación de tercer grado.

En un artículo de Roger Alperin aparecido en el New York Journal of Mathematics (ver [Alp]), se hace una discusión del alcance de los axiomas presentados, y se caracterizan los “puntos de origami” como aquellos números del plano complejo  $\mathbb{C}$  constructibles tras la aplicación finita de los axiomas **O1-O6**. El resultado central es:

**Teorema [Alperin]:** El conjunto **O** de los puntos los puntos constructibles con origami se puede caracterizar de las siguientes maneras:

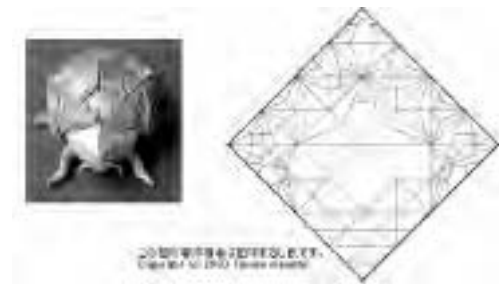
- i) el menor subcuerpo de  $\mathbb{C}$  cerrado por raíces cuadradas, cúbicas y conjugación compleja;
- ii) el conjunto de los puntos constructibles por intersección de líneas constructibles y cónicas constructibles (con directrices, focos, radios y excentricidades constructibles).

## 4. MÉTODOS MATEMÁTICOS DE DISEÑO

Lo que hemos visto hasta ahora no tiene mucho que ver, en un principio, con las maravillosas figuras de papel con tantas patas, alas y cuernos que pueblan el repertorio de la papiroflexia. En este apartado, vamos a tratar de explicar cómo los mejores plegadores del mundo usan las matemáticas para sus diseñar sus modelos.

### 4.1. PROPIEDADES DEL MAPA DE CICATRICES DE UNA FIGURA PLANA

Como hemos comentado antes, al desplegar un modelo de origami descubrimos en el cuadrado un fenomenal mapa de pliegues, un grafo, al fin y al cabo, donde se me forman valles (pliegues donde la arista está más baja que el papel próximo) y montañas (pliegues donde la arista del grafo es una cumbre). El problema que nos planteamos, en general, es:



Mariquita (Tanaka Masashi) y mapa de cicatrices

**Problema:** Dado un trozo de papel y un grafo dibujado en el papel donde cada arista es una montaña o un valle, ¿cómo podemos saber si es el mapa de cicatrices de un modelo de papiroflexia?

Así planteado, este problema es muy difícil, casi inabordable. Por eso, tal y como se hace en matemáticas, restringiremos nuestra atención a una clase más sencilla, los *modelos planos*, eso es, figuras de papiroflexia que se pueden meter en un libro sin añadir nuevas cicatrices, o dicho de otro modo, tales que el ángulo diedro en cada arista es múltiplo de  $\pi$ . La gran mayoría de modelos de papiroflexia cae en esta categoría.

El grafo del mapa de cicatrices de un modelo plano cumple una serie de propiedades, que han sido estudiadas por diversos plegadores, y que listamos a continuación. Las pruebas son elementales, pero no triviales:

- **(Maekawa)** La diferencia entre el número de pliegues en montaña y en valle en un vértice es siempre 2.
- El grado de cada vértice es par.
- **(Meguro)** Las caras de un mapa de cicatrices son 2-coloreables.
- **(Kawasaki)** Sean  $\alpha_1, \dots, \alpha_{2k}$  todos los ángulos concurrentes en un vértice, contiguos cada uno con el siguiente. Entonces, tenemos:

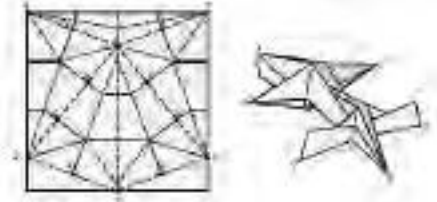
$$\alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{2k-1} = \alpha_2 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{2k} = \pi$$

- **(Hull)** La condición anterior es una condición suficiente.

T. Hull en [Hull2] halla más resultados sobre las propiedades que tiene que cumplir un grafo para corresponder a un modelo plano, y sobre las posibles asignaciones valle-montaña que tiene un grafo determinado.

## 4.2. MÉTODO DE MEGURO-KAWAHATA-LANG

Los resultados anteriores nos hablan de propiedades que ha de tener un mapa de cicatrices para que pueda convertirse en un modelo plano, pero otra cuestión distinta es, por ejemplo, si queremos diseñar un ciervo, o una lagartija, cómo nos las podemos ingeniar. Un método es el tan recurrido ensayo-error, basado en la experiencia, el cual tiene sus límites, sobre todo si queremos conseguir un modelo complicado como puede ser un insecto. A continuación voy a intentar describir la formalización del problema que han realizado diversos plegadores, en particular, Toshikuyi Meguro, Fumiaki Kawahata y Robert Lang.



Base proyectable y mapa de cicatrices de un modelo plano

Una base es una aproximación esquemática a la figura que queremos obtener. La base resulta de un número finito de pliegues, en cuya forma final se pueden observar las solapas y puntas necesarias, con las longitudes deseadas que nos llevarán al modelo que queremos. Una vez obtenida la base, no es difícil llegar al modelo, o por lo menos, ya es una cuestión artística y abordable.

Consideraremos un tipo de bases: aquellas en las que se pueden distribuir las puntas de modo que la base se proyecta ortogonalmente en un grafo plano, simple y sin caras, tal y como vemos en la figura. El problema va a ser saber si dado un grafo de este tipo vamos a poder encontrar un mapa de cicatrices que me proporcione una base que se proyecte sobre ese grafo.

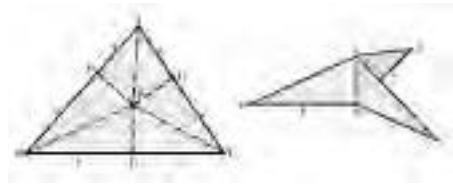
### 4.2.1. Método Meguro-Kawahata de las hipérbolas

Vamos a ilustrar la respuesta que dan Meguro y Kawahata (ver [Kawa] y [Voy]) al problema anterior mediante el siguiente gráfico. En primer lugar, idealizamos nuestro modelo. Luego, cuando tenemos el grafo, hemos de distribuir en el papel las puntas de la base, de la siguiente manera. Luego, nos hemos de fijar en lo siguiente: cuando queremos conseguir dos puntas independientes, en un triángulo, se hace doblando por las tres bisectrices y una de las alturas desde el incentro. Por lo tanto, al pensar que tenemos que meter aquí el tercer vértice de un triángulo, hay que calcular el lugar geométrico de los posibles vértices tal que el incentro cumpla lo que ha de cumplir, y un cálculo sencillo nos proporciona que ese lugar geométrico es una hipérbola. Entonces allá donde se corten las hipérbolas, o donde se corten con pliegues o puntos que hayamos impuesto, como una diagonal, por ejemplo, obtenemos nuevos



Aplicación del método F. Kawahata

puntos de nuestro mapa de pliegues. Con este método podemos tener una primera aproximación al modelo. Luego habría que rellenar los pliegues, para lo que hay otros razonamientos geométricos elementales. El resultado que consigue Kawahata con este método es francamente impresionante.



Pliegue oreja de conejo



Lugar geométrico de los incentros

#### 4.2.2. El Treemaker de R. Lang

El método del árbol (grafo sin caras) de Lang es un método de similar estructura al de Kawahata. Lang permite que los vértices del grafo del modelo estén también en el interior del cuadrado de papel. Vamos a ilustrar su método con el siguiente ejemplo: Para conseguir un perro, diseña un grafo con aristas de determinada longitud, y las distribuye en el cuadrado intentando aprovechar toda la superficie del cuadrado. Ahora cabe plantearse si existirá un mapa de cicatrices conteniendo este árbol que nos lleve a la base deseada. Lang ha encontrado una condición necesaria y suficiente para la existencia de un tal mapa de cicatrices, tal y como se enuncia en el siguiente (ver [Lang2]):

##### Teorema (del árbol de Lang):

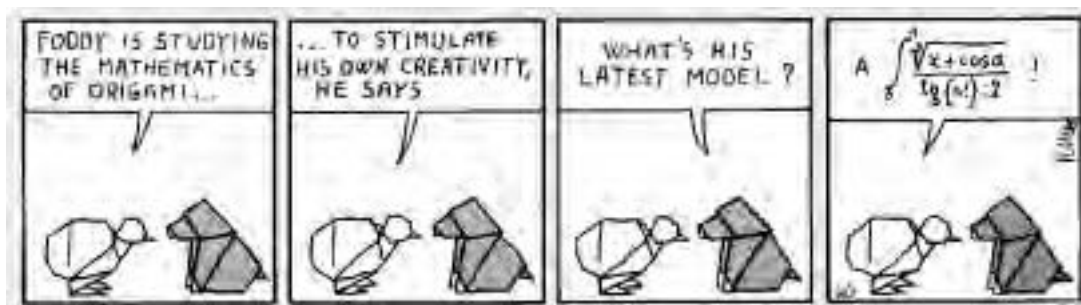
Sea un árbol  $T$  simplemente conexo con puntos terminales  $P_1, \dots, P_n$ , y sean  $l_{ij}$  las distancias entre  $P_i$  y  $P_j$  medidas a lo largo de las aristas del árbol. Sea un conjunto de puntos  $u_i$  en el cuadrado unidad. Entonces, la condición necesaria y suficiente para que exista un mapa de cicatrices que transforme el cuadrado en una base cuya proyección sea el árbol  $T$  es:

$$u_i - u_j \leq l_{ij} \quad \forall i, j$$

Más aún, en dicha base, cada punto  $P_i$  es la proyección del punto  $u_i$  para todo  $i$ .

De la prueba, que no es en absoluto trivial, se desprende una manera de construir un algoritmo que calcule el mapa de cicatrices deseado. El autor ha implementado el algoritmo en un programa de ordenador para Macintosh, el Treemaker, de libre distribución.

Tanto del método de Kawahata-Meguro como del de Lang, por supuesto, se derivan problemas adicionales. El primero es obtener mediante dobleces los ángulos que proporciona el método. El segundo consiste en que, aun obteniendo un mapa de cicatrices, encontrar una secuencia de plegado que nos lleve hasta la figura deseada es realmente complejo. No todo en papiroflexia se basa en métodos matemáticos; la experiencia y la componente artística no se pueden dejar de lado. Esto viene muy bien reflejado en el siguiente Origam :



Origag, de Roberto Morassi (1984)

## 5. CONCLUSIONES

Como conclusión, quisiéramos señalar que las conexiones entre las matemáticas y la papiroflexia no son meramente anecdóticas, y de hecho hemos visto cómo afloran de formas muy distintas. No en vano, en Japón se celebran con frecuencia simposios de matemáticos papiroflexas donde exponen y comparten sus técnicas, y aparecen salpicadamente artículos de papiroflexia en diversas revistas matemáticas (no sólo de divulgación). La papiroflexia constituye una atractiva forma de acercarse a las matemáticas, y queremos reivindicar desde estas líneas un hueco para esta bella arte en la enseñanza, por su riqueza cultural y su gran valor pedagógico.

## 6. BIBLIOGRAFÍA

- [Alp] **R.C. Alperin**, "A mathematical Theory of Origami Constructions and Numbers", *New York J. Math*, 6 (2000) 119-133.
- [Cox] **H.S.M. Coxeter**, "Regular Polytopes", *Dover*, 1973 (prev.1967).
- [Engel] **P.Engel**, "Origami: from Angelfish to Zen", *Dover*, 1994.
- [Hull1] **T. Hull**, "Página web de Tom Hull", <http://web.merrymack.edu/~thull/>
- [Hull2] **T.Hull**, "On the mathematics of flat origamis", *Congressus Numerantium* 100, 215-224, (1994).
- [Hull3] **T.Hull**, "A note on «Impossible» Paper Folding", *Amer. Math. Monthly*, 103 240-241, (1996).
- [Kasa] **K.Kasahara, T.Takahama**, "Origami para expertos", *Edaf*, 2000 (prev. 1987)
- [Kawa] **F. Kawahata**, "The technique to fold free angles of formative art «origami»", *Second International Meeting on Origami Science and Scientific Origami*, Otsu, Japón,1994.
- [Lang1] **R. Lang**, "The Complete book of Origami", *Dover*, 1989.
- [Lang2] **R.Lang**, "TreeMaker 4.0: A program for Origami Design", <http://origami.kvi.nl/programs/TreeMaker/trmkr40.pdf>
- [Row] **S.Row**, "Geometric exercises in paper folding", *Dover* 1966 (1ªed. 1905).
- [SAG] **L.Simon, B.Arnstein, R.Gurkewitz**, "Modular Origami Polyhedra", *Dover*, 1999.
- [Voy] **J.A.Voyer**, "Introducción a la Creación", (*Seres de Ficción, El lado oscuro de la Papiroflexia*), *Ed. Salvatella*, 2000.
- [AEP] "Página web de la Asociación Española de Papiroflexia", <http://www.pajarita.org>